PART3　数学的帰納法

例題

n を自然数とするとき，数学的帰納法を用いて次の等式を証明せよ。

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

Point Pickup

練習

n を自然数とするとき，数学的帰納法を用いて次の等式を証明せよ。

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

第 4 講　PART3 確認問題

1　n を自然数とするとき，次の等式(A)が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \cdots\cdots\text{(A)}$$

(証明)

[1]　$n=$ [ア] のとき

(A)の左辺 $=$ [イ],

(A)の右辺 $=$ [ウ]

よって，$n=$ [ア] のとき，(A)は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(A)が成り立つと仮定すると

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

$n=k+1$ のとき

(A)の左辺

$=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2$

$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+$ [エ]

$=\frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}$

$=\frac{1}{6}(k+1)\big(2k^2+$ [オ] $k+$ [カ] $\big)$

$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)\big(2k+$ [キ] $\big)$

$=\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}$

となり，$n=k+1$ のときの(A)の右辺と一致する。

よって，$n=k+1$ のときにも(A)は成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n について，(A)が成り立つ。

(証明終わり)

ア ～ キ に当てはまる数や式を答えよ。

エ は，次の①～④のうちから選べ。

① k^2　　② k^2+1

③ $(k+1)^2$　　④ $(k-1)^2$

PART3　数学的帰納法

例題

n を自然数とするとき，数学的帰納法を用いて次の等式を証明せよ。

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ …… ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　　①の左辺 $=1^3=1$，　①の右辺 $=\left(\dfrac{1\cdot 2}{2}\right)^2=1$

よって，$n=1$ のとき，①は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$$

$n=k+1$ のとき

$$\text{①の左辺}=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3+(k+1)^3$$
$$=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+(k+1)^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3$$
$$=\frac{1}{4}(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2=\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$$

となり，$n=k+1$ のときの①の右辺と一致する。

よって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n について，①が成り立つ。

練習

n を自然数とするとき，数学的帰納法を用いて次の等式を証明せよ。

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ …… ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　　①の左辺 $=1\cdot2=2$，　①の右辺 $=\frac{1}{3}\cdot1\cdot2\cdot3=2$

よって，$n=1$ のとき，①は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

$n=k+1$ のとき

①の左辺 $=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$

$=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$

となり，$n=k+1$ のときの①の右辺と一致する。

よって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，①が成り立つ。

第 4 講　PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：1，ウ：1，エ：③，オ：7，
カ：6，キ：3

[解説]

[1]　$n=1$ のとき [A]

$(\text{左辺})=\mathbf{1}$，$(\text{右辺})=\mathbf{1}$

よって，$n=1$ のとき，(A)は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(A)が成り立つと仮定すると

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

$n=k+1$ のとき

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2$$ [B]

$$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+\boldsymbol{(k+1)^2}$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)\left(\boldsymbol{2k^2+7k+6}\right)$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boldsymbol{2k+3})$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}$$

よって，$n=k+1$ のときにも(A)は成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，(A)が成り立つ。

[A]　数学的帰納法
ある命題が，すべての自然数 n について成り立つことを証明するには，次の 2 つのことを示す。
[1]　$n=1$ のとき成り立つ。
[2]　$n=k$ のとき成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときにも成り立つ。

[B]　(A)に $n=k+1$ を代入した等式が成り立つことを示す。